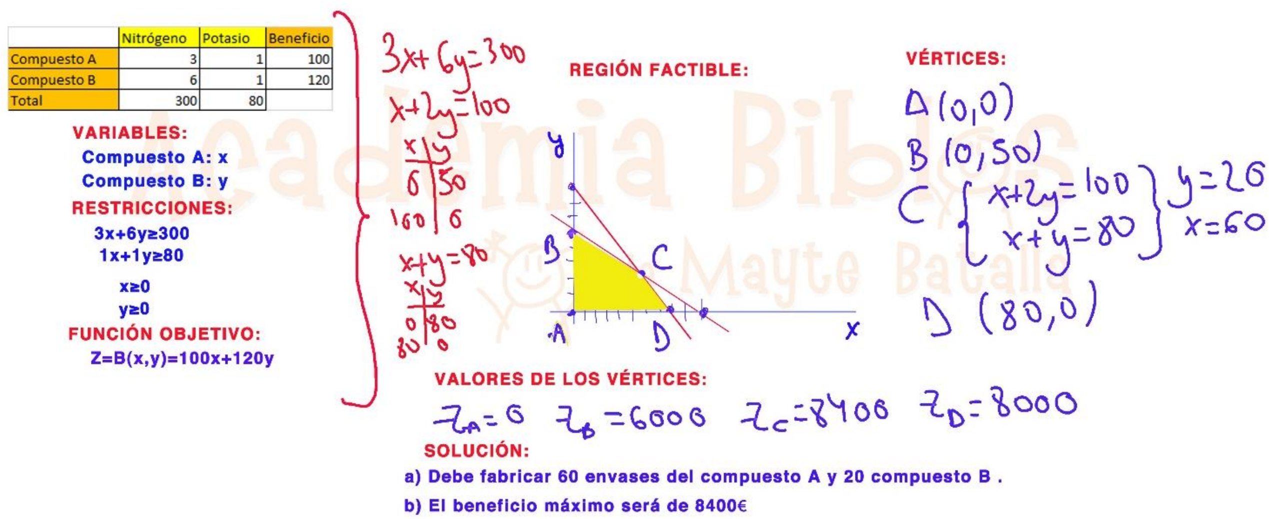
Índice

Problemas resueltos por María Teresa Batalla Calvín para Academia Biblos

Problema 1

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kilos de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100€ y el del envase del compuesto B es de 120€. ¿Cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el valor de dicho beneficio?



	Nitrógeno	Potasio	Beneficio
Compuesto A	3	1	100
Compuesto B	6	1	120
Total	300	80	

Problema 2

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de de piel, siendo el beneficio obtenido de 70€ por cada par de zapatos y de 80€ por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel, ¿cuántos pares de zapatos y botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios?

	Piel	Horas	Beneficio
Zapatos	0.5	1	70
Botas	1	1	80
Total	35	50	

VARIABLES:

Zapatos: x

Botas: y

RESTRICCIONES:

$0.5x+1y\geq35$

$1x+1y\geq50$

$x\geq0$

$y\geq0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$Z=B(x,y)=70x+80y$

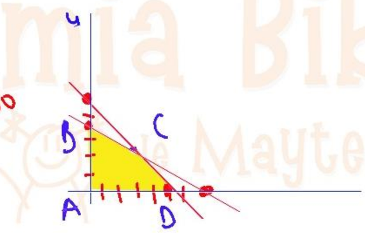
$0'5x+y=35$

x	y
0	35
70	0

$x+y=50$

x	y
0	50
50	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

A(0,0)

B(0,35)

$C\begin{cases}0'5x+y=35\\ x+y=50\end{cases}$ $x=30$, $y=20$

D(50,0)

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$Z_A=0$ $Z_B=2800$ $Z_C=3700$ $Z_D=3500$

SOLUCIÓN:

a) Debe fabricar 30 zapatos y 20 botas .

b) El beneficio máximo será de 3700€

Problema 3

Sean A, B e I las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

::

Vamos a hacerlo despejando la X ya que es muy sencillo:

$$(A \cdot B)^{-1}(A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1}(A \cdot B + I)$$

$$X = (A \cdot B)^{-1}(A \cdot B + I)$$

Operamos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$|A \cdot B| = 10$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos A·B+I

$$A \cdot B + I = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.8} & \mathbf{0.6} \\ \mathbf{-0.3} & \mathbf{1.4} \end{pmatrix}$$

Problema 4

Sean X, I y 0 las matrices siguientes:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica:

$$X^2-4X+3I=0$$

::

Tan solo tenemos que operar:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4X = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X^2-4X+3I=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4a+3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-4a+3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tan solo tenemos que igualar los elementos $a_{1.1}$ de ambos miembros (el resto coincide)

$a^2 - 4a + 3 = 0$; Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos que

a_1=3 y a_2=1

Problema 5

Durante el estudio de una medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo , t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t)=t^3-12t^2+36t+60 \; (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momentos se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

Para calcular el máximo y el mínimo, veremos qué valores anulan la primera derivada y estudiaremos su signo en la segunda derivada.

$R'(t)=3t^2-24t+36=3\cdot(t^2-8t+12) \rightarrow G'(t)=0 \rightarrow t^2-8t+12=0 \rightarrow t=2$ y $t=6$

$R''(t)=3\cdot(2t-8) \rightarrow R''(2)=-12 < 0$ máximo relativo $R''(6)=12 >0$ mínimo relativo

Calculamos los valores en los t=2 y t=7 (en la función original) así como en los límites superior e inferior del dominio de la función.

$R(1)=85$

$R(2)=92$

$R(6)=60$

$R(7)=67$

La hora en la que *se produce el mínimo ruido es a la sexta hora y dicho gasto es de 60 decibelios, la hora de máximo ruido es la segunda hora con un valor de 90 decibelios.*

Problema 6

Cierta levadura es utilizada utilizada en la masa del pan en una cantidad x entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno F(x) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo con la función

$$\begin{cases} BX+2A & \text{si } 1\leq x<3 \\ x^2+Ax-B & \text{si } 3\leq x\leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar las respuestas

::

Sabemos que f(2)=2 y que la función es continua, por tanto,

$$\lim_{t\to 3^-}(\mathrm{BX}+2\mathrm{A}) = \lim_{t\to 3^+}(\mathrm{x}^2+\mathrm{Ax}-\mathrm{B}) = F(3)$$

$$2B+2A=2 \rightarrow A+B=1$$

$$3B+2A=9+3A-B \rightarrow -A+4B=9$$

Resolvemos el sistema reduciendo las aes (A) y obtenemos 5B=10, B=2 y , por tanto, A=-1

Problema 7

Se pide, justificando la respuesta:

(a) Hallar el área encerrada por la función f(x)=x^2+3x+3 y el eje OX entre x=1 y x=3

(b) Calcula las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}$$

::

(a) Para hallar el área encerrada primero comprobaremos el dominio de la función y vemos que el dominio de la función es (-∞, ∞) por lo que podemos resolver la integral sin problema.

$$\int_1^3 (x^2+3\mathrm{x}+3) = \left|\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3\mathrm{x}\right|_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{63}{2}-\frac{29}{6} = \frac{80}{3}\ u^2$$

(b) Nos piden las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}$$

- Asíntota vertical: Calculamos los valores que anulan el denominador.

  Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que x=-1 y x=-2

$$\lim_{x\to--1^-}\left(\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}\right) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-2^-}\left(\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}\right) = \infty \ ; \ \lim_{x\to-2^+}\left(\frac{-2x^{\,2}-1}{3\,(x^2+x-2)}\right) = -\infty$$

Tenemos asíntotas verticales en x=-1 y x=-2

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}\right) = -\frac{2}{2} = -1 \ ; \ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}\right) = -\frac{2}{2} = -1$$

Tiene una asíntota horizontal en y= -1

- Asíntota oblicua: No tiene (asíntota horizontal y oblicua son excluyentes)

Problema 8

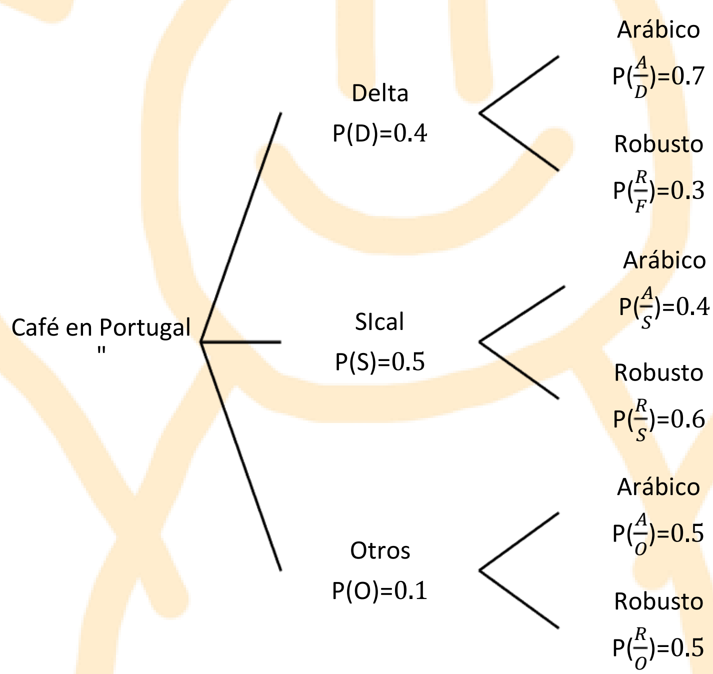
En Portugal, el 40% del café consumido es de la marca Delta, el 50% de la marca Sical y eñ 10% restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70% de sus envases y la variedad robusta para el 30%, Sical utiliza arábica en el 40% de sus envases y robusta en el 60%. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50% de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de la variedad arábica.

(b) Calcular la probabilidad de que n un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta.

::

Elaboramos un diagrama de árbol



(a) Siguiendo el diagrama de árbol:

$$P(S \cap A) = P(S) \cdot P\left(\frac{A}{S}\right) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

El 20% es la probabilidad de ser Sical de la variedad arábiga

(b) Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

P(R)= $P(D \cap R) + P(S \cap R) + P(O \cap R) = P(D) \cdot P\left(\frac{R}{D}\right) + P(S) \cdot P\left(\frac{R}{S}\right) + P(O) \cdot P\left(\frac{R}{O}\right) = 0.4 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.47$

El 47% de probabilidad de que el café sea robusto

Problema 9

Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 cm- Se eligen 100 galletas al azar de las producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95% para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

::;

N$(\mu, 2)$

$\bar{x} = 8$; n=100 ; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(8\text{-}1.960\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\,,\ 8\text{+}1.960\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}) \rightarrow (7.608.8.392)$$

Problema 10

Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con una distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta

---

N$(\mu, 20)$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Tamaño = 2 $Error$ → $Error$ = Tamaño / 2 → $Error = 5$

$Error$ = $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejamos n → n ≥ $(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{Error})^2$ → n≥ $(1.96 \cdot \frac{20}{5})^2$ → n≥ 61.4656

Hemos de seleccionar a 62 tiendas